Some b-functions of regular 2-simple prehomogeneous vector spaces of type I (Automorphic Forms and their Dirichlet series)

若槻, 聡

数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 154-166

Some b-functions of regular 2-simple prehomogeneous vector spaces of type I

大阪大学理学研究科 若槻 聡 (Satoshi Wakatsuki)
(Graduate School of Science, Osaka University)

1 序

本稿の目的は関数等式を用いた b-関数の計算方法とその計算の例について説明することである. 関数等式を用いた計算方法は K. Ukai によるものである ([16]). 我々はその手法を倣うことにより, いくつかの type I の正則な 2-単純概均質ベクトル空間の b-関数を具体的に決定することができた.

我々の計算した b-関数の空間について説明したい. 既約概均質ベクトル空間と正則な単純概均質ベクトル空間の b-関数は既に知られている. 我々の扱う空間が含まれる 2-単純概均質ベクトル空間は T. Kimura 他により分類されており, 大きく type I と type II に分けられている. そして既約でなく単純概均質ベクトル空間と裏返し同値でない正則な type I の 2-単純概均質ベクトル空間は, [7] において (1) から (46) に分類されている. 代数群をみることでクラスに分けると

(a) $(SL(n),\Lambda_2)$ を含むクラス ((1)-(9))

(b) $Sp(n)$ と $SO(n)$ を含むクラス ((10)-(20))

(c) $n\leq 8$ の $Spin(n)$ を含むクラス ((21)-(33))

(d) $Spin(10)$ を含むクラス ((34)-(44))

(e) G_2 を含むクラス ((45)(46))

と (a) から (e) の 5 つのクラスになる. 我々の結果は [15] において (b) のクラスの b-関数を計算したことである. ただし (20b) の空間の b-関数は [10] において, より一般的な形ですでに決定されている. (c)(e) の b-関数の計算は (b) の結果に帰着することができるので, (b) を計算することにより (c)(e) を得た. そして (a) の 2,3 の空間は [16] に含まれているが, 困難な空間である (8)(9)(41) を除く (a) と (d) の空間全体としては K. Sugiyama により b-関数が計算されている ([14]). これらの結果を合わせることにより,

(8)(9)(41) を除いてすべての type I の正則な 2-単純概均質ベクトル空間の b-関数を具体的に与えることができている.

概均質ベクトル空間の研究における b-関数の重要性について述べておきたい. まず b-関数から関数等式のガンマ因子とある程度のゼータ関数の極の位置が明らかになることが知られている. そして $\mathbb{C}$ 上や条件のついた $\mathbb{R}$ 上のある局所ゼータ関数は b-関数の値から明快に計算できることも知られている ([3]). さらにこの局所ゼータ関数に関する結果は多変数化されており, 多変数 b-関数の値から計算される多変数の局所ゼータ関数については [1] と [2] で述べられている.

2 準備

このセクションでは [5] を参考に概均質ベクトル空間の基本性質について説明する. G を $\mathbb{C}$ 上の連結線型代数群とし, V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間, $\rho : G \to GL(V)$ を有理表現とする. このとき三つ組 (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であるとは稠密な開軌道 $Gv_0(v_0 \in V)$ が存在するときをいう. 以下 (G, ρ, V) は概均質ベクトル空間と仮定する. $S = V \setminus O_0$ を特異集合と呼び, $V \setminus S$ の点を生成点と呼ぶ. さて f を V 上の有理関数とし, χ を G の指標とする. このとき f が χ に対応する相対不変式であるとは, すべての $g \in G$ と $x \in V$ について $f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x)$ が成り立つときを言う.

補題 1 **[5, 命題 2.4]** 相対不変式 f_1, f_2 が同じ指標に対応するならば, ある定数 c が存在して $f_2 = cf_1$ となる.

補題 2 **[5, 定理 2.9]** 特異集合 S の余次元 *1* の既約成分たちを $S_1, \ldots, S_l$ とする. そして既約多項式 $f_i(x)$ について $S_i = \{x \in V : f_i(x) = 0\}(1 \leq i \leq l)$ となることを仮定する. そのとき $f_1(x), \ldots, f_l(x)$ は代数独立な相対不変式で, 任意の相対不変式 $f(x)$ は $f(x) = cf_1(x)^{m_1} \ldots f_l(x)^{m_l}(c \in \mathbb{C}, (m_1, \ldots, m_l) \in \mathbb{Z}^l_{\geq 0})$ と一意的に表される.

これら $f_1, \ldots, f_l$ を (G, ρ, V) の基本相対不変式と呼ぶ.

V^* を V の双対ベクトル空間とし, $\rho^* : G \to GL(V^*)$ を ρ の反傾表現とする. また G が簡約可能代数群であるとき (G, ρ, V) を簡約可能概均質ベクトル空間と呼ぶ.

補題 3 [5, 命題 2.21] (G,ρ,V) を簡約可能概均質ベクトル空間とすると，その双対 (G,ρ^*,V^*) も概均質ベクトル空間で $f(x)$ が (G,ρ,V) の χ に対応する d 次の相対不変多項式ならば，(G,ρ^*,V^*) には χ^{-1} に対応する d 次の相対不変多項式 $f^*(x)$ が存在する．

補題 4 [5, 命題 2.22] (G,ρ,V) を簡約可能概均質ベクトル空間，$f(x)$ が (G,ρ,V) の χ に対応する d 次の相対不変多項式，$f^*(x)$ を (G,ρ^*,V^*) の χ^{-1} に対応する d 次の相対不変多項式とする．このとき

$$f^*(\mathrm{grad}_x)f(x)^{s+1}=b_f(s)f(x)^s$$

を満たす s の多項式 $b_f(s)$ が存在する．ただし $\mathrm{grad}_x=(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ と置く．$b_f(s)$ は $x\in V\setminus S$ に依存せず，$\deg(b_f)=\deg(f)$ が成り立つ．そして $(s+1)$ は $b_f(s)$ の因数である．

この多項式 $b_f(s)$ を f の b-関数と呼ぶ．

$f(x)$ を (G,ρ,V) の χ に対応する相対不変式とするとき写像 $\varphi_f=\mathrm{grad}\log f$ $V\setminus S\to V^*$ を

$$\phi_f(x)=\left(\frac{1}{f(x)}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{1}{f(x)}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\cdots,\frac{1}{f(x)}\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

で定義する．この写像 φ_f の像 $\varphi_f(V\setminus S)$ が V^* において Zariski 稠密になるとき，相対不変式 $f(x)$ を非退化と呼ぶ．そして非退化な相対不変式をもつ概均質ベクトル空間を正則概均質ベクトル空間と呼ぶ．

3 b-関数について

このセクションでは[11]を参考に多変数 b-関数について説明する．まずこのセクションを通じて (G,ρ,V) が簡約可能な正則概均質ベクトル空間であることを仮定する．補題 2 より (G,ρ,V) の基本相対不変式を $f_1,f_2,\cdots,f_l$ とし，それぞれ指標 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l$ と対応させる．そして補題 3 により双対 (G,ρ^*,V^*) の基本相対不変式 $f_1^*,f_2^*,\cdots,f_l^*$ を指標 $\chi_1^{-1},\chi_2^{-1},\ldots,\chi_l^{-1}$ にそれぞれ対応するようにとれる．ここで $\underline{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_l)$ と置く．$\underline{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_l)\in\mathbb{Z}^l$ について $\underline{f}^{\underline{s}}:=\Pi_{i=1}^l f_i^{s_i}$ と書くことにする．[11] により次のことが分かる．

補題 5 (M. Sato) 任意の $\underline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_l) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l$ について

$$\underline{f}^{*\underline{m}}(\mathrm{grad})\underline{f}^{\underline{s}+\underline{m}} = b_{\underline{m}}(\underline{s})\underline{f}^{\underline{s}}$$

をみたす0でない多項式 $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ が存在する.

この $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ を $\underline{f}$ の b-関数と呼ぶ. ここで記述の簡略化のために整数 k と有理関数 $\eta(t)$ について次のように記号 $[\eta(t)]_k$ を定義する.

$$[\eta(t)]_k = \begin{cases} \prod_{r=0}^{k-1} \eta(t+k) & (k>0) \\ 1 & (k=0) \\ 1/\prod_{r=k}^{-1} \eta(t+k) & (k<0) \end{cases}.$$

b-関数は次のような形をしている.

定理 1 (M. Sato) [11, 定理 3] b-関数 $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ は

$$b_{\underline{m}}(\underline{s}) = \underline{A}^{\underline{m}} \prod_{j=1}^{N} [\eta_j(\gamma_j(\underline{s}))]_{\gamma_j(\underline{m})}$$

と表せる. ただし, $\eta_j(t)$ は t の一変数有理関数で, $\underline{A}^{\underline{m}} = \Pi_{i=1}^{l} A_i^{m_i}$ $(A_i \in \mathbb{C}^{\times})$ $N \in \mathbb{Z}_{>0}$、$\gamma_j(\underline{s}) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_{ij} s_i$, $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $GCD(\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{lj}) = 1$ となっている.

続いて一つ仮定をしたい.

仮定 各 j $(1 \leq j \leq N)$ に対して $\gamma_j(\underline{m}) = 1$ となる $\underline{m} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l$ が存在する.

一次式 $\gamma_j(\underline{s})$ は後で述べる a-関数の計算により得られるのだが, 我々の扱った概均質ベクトル空間ではこの仮定が成り立っている. そのため, この仮定により $\eta_j(t)$ が多項式なることと, M. Kashiwara の [4] における結果により次を得る.

補題 6 [11, 定理 3 の系]+ [4, Corollary 5.2]

$$b_{\underline{m}}(\underline{s}) = \underline{A}^{\underline{m}} \Pi_{j=1}^{N} \Pi_{r=1}^{\mu_j} [\gamma_j(\underline{s}) + \alpha_{j,r}]_{\gamma_j(\underline{m})}$$

$\alpha_{j,r} \in \mathbb{Q}_{>0}$、$\mu_j \in \mathbb{Z}_{>0}$ が成り立つ.

ここでも有理関数のときと同様に記号 $[a]_k$ は

$$[a]_k = \begin{cases} (a)(a+1)\cdots(a+k-1) & (k>0) \\ 1 & (k=0) \\ 1/(a-1)(a-2)\cdots(a+k) & (k<0) \end{cases}$$

であることに注意する. 我々の目的は一次式 $\gamma_j(\underline{s})$, $\alpha_{j,r} \in \mathbb{Q}_{>0}$, $N, \mu_j \in \mathbb{Z}_{>0}$ を具体的に計算することで, 基本相対不変式の定数倍に依存する因子 $\underline{A}^{\underline{m}}$ を除いて b-関数を決定することである. また b-関数はコサイクルコンディションを満たす. つまり $b_{\underline{m_1}+\underline{m_2}}(\underline{s}) = b_{\underline{m_1}}(\underline{s})b_{\underline{m_2}}(\underline{s}+\underline{m_1})$ が成り立つ. したがって b-関数の計算は $b_1(\underline{s}), b_2(\underline{s}), \cdots, b_l(\underline{s})$ の計算に帰着される. ここで i 番目に 1 のでてくる $\xi_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ について $b_{\xi_i}(\underline{s})$ を $b_i(\underline{s})$ と書いている.

次に a-関数について述べたい. a-関数とは b-関数の最高次部分のことで

$$a_{\underline{m}}(\underline{s}) = \underline{A}^{\underline{m}}\Pi_{j=1}^{N}(\gamma_j(\underline{s})^{\gamma_j(\underline{m})})^{\mu_j}$$

となっている. b-関数のときと同様に $a_{\xi_i}(\underline{s})$ を $a_i(\underline{s})$ と書く. 明らかに $a_{\underline{m}}(\underline{s}) = \prod_{i=1}^{l} a_i(\underline{s})^{m_i}$ が成り立っている. そしてこの a-関数は次のような等式を満たしている. $\varphi_{f_i}(v)$ を $\varphi_i(v)$ と書くことに注意する.

補題 7 [11, 命題 9] 任意の $\underline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_l) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l$ について

$$a_{\underline{m}}(\underline{s}) = \underline{f}^{\underline{m}}(v)\underline{f}^{*\underline{m}}(\varphi_{\underline{f}^{\underline{s}}}(v)) = \underline{f}^{\underline{m}}(v)\underline{f}^{*\underline{m}}(\Sigma_{i=1}^{l} s_i\varphi_i(v))$$

が成り立つ. ただし生成点 v に依存せず, $a_{\underline{m}}(\underline{s})$ は 0 でない.

この補題により a-関数を計算するためには, 生成点が与えられ基本相対不変式が具体的に構成されていれば, 各 φ_i を計算すれば良いことが分かる. その結果, a-関数は b-関数にくらべて格段に易しく計算することが可能である. これにより a-関数を計算することができれば b-関数の計算は $\alpha_{j,r}$ の決定に帰着される.

(G,ρ,V) は正則なので (G,ρ,V) は指標 $(\det\rho(g))^2$ に対応する相対不変式をもつことが知られている. 補題 2 により $(\det\rho(g))^2$ に対応する相対不変式はある $2\underline{\kappa} \in \mathbb{Z}^l$ が存在して $\underline{f}^{2\underline{\kappa}}$ とすることができる. そのとき次の関数等式が得られる.

定理 2 [11, 定理 4]

$$b_{\underline{m}}(\underline{s}) = (-1)^{\deg \underline{f}^{\underline{m}}} b_{\underline{m}}(-\underline{s}-\underline{m}-\underline{\kappa})$$

ただし $\deg \underline{f}^{\underline{m}} = \Sigma_{i=1}^{l} m_i \deg f_i$ である.

この関数等式により $\alpha_{j,r}$ に多くの情報が与えられる．また補題4と補題5により $b_i(s\xi_i) = b_{f_i}(s)$ が成り立っている．可約な概均質ベクトル空間の場合には，ある i についての $b_{f_i}(s)$ が既知であることがかなりある．我々は主にこの二つの情報により $\alpha_{j,r}$ を計算していく．

我々の扱った空間では以上の情報を合わせることにより b-関数を決定することができるのである．

4 主結果について

このセクションでは序章で述べた主結果について説明したい．序章で述べたように，$Sp(n)$ と $SO(n)$ に関連する空間は [7] において (10) から (20) に分類されている．そのうち (10b)(11)(12)(13)(14) の空間の b-関数は既知な場合に帰着される．(17) の空間の b-関数は (18) に含まれている．(20b) の空間 $(GL(1)^2 \times SO(n) \times SL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$ の b-関数は [10] において，より一般的な形ですでに決定されている．したがって我々が計算した主要な空間は

(10a) $(GL_1^3 \times Sp_n \times SL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)(n > m)$

(10c) $(GL_1^3 \times Sp_n \times SL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^* + 1 \otimes \Lambda_1^*)(n > m)$

(15a) $(GL_1^4 \times Sp_n \times SL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))(n > m)$

(15b) $(GL_1^4 \times Sp_n \times SL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1)^*)(n > m)$

(16) $(GL_1^3 \times Sp_2 \times SL_3, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_2 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$

(18) $(GL_1^3 \times Sp_2 \times SL_2, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1)$

(19) $(GL_1^3 \times Sp_2 \times SL_4, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$

(20a) $(GL_1^2 \times SO_n \times SL_m, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)(n > m > 1)$

となる．

定理 3 上で与えられた空間 (10a)(10c)(15a)(15b)(16)(18)(19)(20a) の多変数 b-関数 $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ を，関数等式を用いた計算方法により具体的に決定した．

そして序章で述べたように，$Spin(n)(n \leq 8)$ と G_2 に関連する (c)(e) のクラスの b-関数は (20a) と (20b) の計算に帰着される．これは b-関数が相対不変式のみに依存しているため，群が異なっていても相対不変式が同じであるなら b-関数が一致するためである．したがって次の系を得る．

系 1 序章で述べたクラスのうち, (b)(c)(e) の空間の多変数 b-関数 $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ を具体的に与えることができた.

5 計算の例

このセクションでは具体的に関数等式を用いた計算方法により b-関数を計算したい. ページが足りないため, 定理 3 にある空間すべての b-関数についての計算を記述することができない. そのため (c)(e) のクラスとも関係のある (20a) の空間についてのみ, 多変数 b-関数の計算を記述したい. (20a) の空間は

$$(GL(1)^2 \times SO(n) \times SL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1, M(n,m) \oplus M(m,1))$$

となっている $(n > m > 1)$. ただし, $M(n,m)$ は $n \times m$ 行列の空間である. まず群を $GL(1) \times SO(n) \times GL(m)$ としても同型であることから変えてもよい. $(\alpha; A, B) \in GL(1) \times SO(n) \times GL(m)$ と $x = (X, Y) \in M(n,m) \oplus M(m,1)$ について $x = (X,Y) \mapsto (AX^tB, \alpha Y^tB)$ で作用が与えられる. 基本相対不変式 f_1, f_2 とそれらに対応する指標 χ_1, χ_2 は [9] より

$$f_1(x) = \det({}^tXX) \quad \leftrightarrow \quad \chi_1(\alpha; A, B) = (\det B)^2$$

$$f_2(x) = \det\left(\begin{array}{c|c} {}^tXX & {}^tY \\ \hline Y & 0 \end{array}\right) \quad \leftrightarrow \quad \chi_2(\alpha; A, B) = \alpha^2(\det B)^2$$

と与えられる. f_1 の b-関数 $b_{f_1}(s)$ は既に知られていることに注意したい.

それでは φ_1, φ_2 を生成点 $\tilde{x}_0 = (X_0, Y_0)$

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} \in M(n,m), \quad Y_0 = e_1 \in M(m,1)$$

について計算したい (I_m は m 次単位行列, $e_1 = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$). まず記号を

$$X = (x_{i,j}) \in M(n,m), \quad Y = (y_i) \in M(m,1),$$

$$g(i,j) = \Sigma_{k=1}^n x_{k,i}x_{k,j}, \quad (1 \leq i,j \leq m)$$

のように定める. このとき m 次の対称群 S_m について

$$f_1(x) = \sum_{\sigma \in S_m} sgn(\sigma) g(1,\sigma(1)) g(2,\sigma(2)) \cdots g(m,\sigma(m))$$

が成り立つ. $\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}f_1$ と $\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}f_2$ を生成点 $\tilde{x}_0$ について計算していくが, その計算中において

$$\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}g(i,j)=\begin{cases} x_{a,j} & (b=i)\\ x_{a,i} & (b=j)\\ 0 & (b\neq i,j)\end{cases}$$

が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}f_1(x)\right|_{x=\tilde{x}_0} &= \sum_{\sigma\in S_m} sgn(\sigma)\Big(g(1,\sigma(1))\ldots\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}g(b,\sigma(b))\ldots g(m,\sigma(m))\\ &\qquad \left.+g(1,\sigma(1))\ldots\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}g(\sigma^{-1}(b),b)\ldots g(m,\sigma(m))\Big)\right|_{x=\tilde{x}_0}\\ &= 2\left.\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}g(b,b)\right|_{x=\tilde{x}_0}=2x_{a,b}|_{x=\tilde{x}_0}=\begin{cases}2 & (1\leq a=b\leq m)\\ 0 & (otherwise)\end{cases}.\end{aligned}$$

したがって

$$\operatorname{grad}\log f_1|_{\tilde{x}_0}=\{\begin{pmatrix}2I_m\\0\end{pmatrix};0\} \qquad (1)$$

を得る. 続いて f_2 について考える.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}f_2(x)\right|_{x=\tilde{x}_0} &= \left.-\frac{\partial}{\partial x_{a,b}}\sum_{\sigma\in S_m,\sigma(1)=1} sgn(\sigma)g(2,\sigma(2))g(3,\sigma(3))\ldots g(m,\sigma(m))\right|_{x=\tilde{x}_0}\\ &= \begin{cases}-2 & (2\leq a=b\leq m)\\ 0 & (otherwise)\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial y_a}f_2(x)\right|_{x=\tilde{x}_0} &= \left.\frac{\partial}{\partial y_a}\left(\det\left(\begin{array}{c|c} I_m & y\\ \hline y & 0\end{array}\right)\right)\right|_{x=\tilde{x}_0}\\ &= \left.-\frac{\partial}{\partial y_a}\sum_{1\leq k\leq m}y_k^2\right|_{x=\tilde{x}_0}=\begin{cases}-2 & (a=1)\\ 0 & (a\geq 2)\end{cases}.\end{aligned}$$

したがって E_{ij} を行列単位とすると

$$\operatorname{grad}\log f_2|_{\tilde{x}_0}=\{\begin{pmatrix}2I'_m\\0\end{pmatrix};2e_1\} \quad (I'_m=I_m-E_{11}) \qquad (2)$$

が得られる．その結果，φ_1, φ_1 が(1)(2)より求まるので $\phi_{f\pm}(\tilde{x}_0) = s_1\varphi_1(\tilde{x}_0) + s_2\varphi_1(\tilde{x}_0)$ であることと，相対不変式 f_1^* と f_2^* は f_1、f_2 と同じ構成で得られることから，

$$\begin{aligned} a_1(s_1,s_2) &= f_1(\tilde{x_0})f_1^*(\phi_{f\pm}(\tilde{x}_0)) = 2^{2m}s_1^2(s_1+s_2)^{2m-2} \\ a_2(s_1,s_2) &= f_2(\tilde{x_0})f_2^*(\phi_{f\pm}(\tilde{x}_0)) = 2^{2m}s_2^2(s_1+s_2)^{2m-2} \end{aligned}$$

と a-関数が決定できた．これは仮定を満たしている．

次に得られた a-関数から

$$\begin{aligned} b_1(s_1,s_2) &= (s_1+\alpha_{1,1})(s_1+\alpha_{1,2})(s_1+s_2+\alpha_{3,1})\dots(s_1+s_2+\alpha_{3,2m-2}) \\ b_2(s_1,s_2) &= (s_2+\alpha_{2,1})(s_2+\alpha_{2,2})(s_1+s_2+\alpha_{3,1})\dots(s_1+s_2+\alpha_{3,2m-2}) \end{aligned}$$

と b-関数の形が作れる．$\alpha_{j,r}$ について計算していきたい．まず[13]おいて $b_{f_1}(s)$ が与えられていることから

$$b_1(s_1,0) = b_{f_1}(s_1) = \Pi_{k=1}^m\left(s+\frac{k+1}{2}\right)\Pi_{l=1}^m\left(s+\frac{n-l+1}{2}\right)$$

が得られる．そして関数等式にでてくる κ は $\det\rho(g) = \alpha^m(\det(B))^{n+1}$ により $2\kappa = (n-m+1, m)$ となる．したがって b_1 と b_2 の関数等式は

$$\begin{aligned} b_1(s_1,s_2) &= b_1(-s_1-\frac{n-m+3}{2}, -s_2-\frac{m}{2}) \\ b_2(s_1,s_2) &= b_1(-s_1-\frac{n-m+1}{2}, -s_2-\frac{m}{2}-1) \end{aligned}$$

と与えられる．さて，まず $\alpha_{3,k}=1$ となる k が存在していると仮定してみよう．そうすると b_1 の関数等式より $\alpha_{3,l} = (n+1)/2$ となる l が存在することになるが，$b_1(s_1,0)$ の式にはそんな因子は存在しないので矛盾が生じた．よって $\alpha_{3,k}=1$ となるような k は存在しない，そして $b_1(s_1,0)$ には (s_1+1) の因子が含まれることから $\alpha_{1,1}=1$ としてよい．ゆえに，b_1 の関数等式から

$$b_1(s_1,s_2) = (s_1+1)(s_1+\frac{n-m+1}{2})\prod_{k=2}^m(s_1+s_2+\frac{k+1}{2})\prod_{l=1}^{m-1}(s_1+s_2+\frac{n-l+1}{2})$$

が得られる．さらに $b_2(0,s_2)$ も因子に (s_2+1) を含むことと関数等式より

$$b_2(s_1,s_2) = (s_2+1)(s_2+\frac{m}{2})\prod_{k=2}^m(s_1+s_2+\frac{k+1}{2})\prod_{l=1}^{m-1}(s_1+s_2+\frac{n-l+1}{2})$$

と求まる．

結果 正則 2-単純概均質ベクトル空間 $(GL(1)^2 \times SO(n) \times SL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$ の b-関数は次のように得られた.

$$\begin{aligned} b_{\underline{m}}(\underline{s}) &= [s_1+1]_{m_1}\left[s_1+\frac{n-m+1}{2}\right]_{m_1}[s_2+1]_{m_2}\left[s_2+\frac{m}{2}\right]_{m_2} \\ &\quad\times \prod_{k=2}^{m}\left[s_1+s_2+\frac{k+1}{2}\right]_{m_1+m_2} \times \prod_{l=1}^{m-1}\left[s_1+s_2+\frac{n-l+1}{2}\right]_{m_1+m_2} \end{aligned}$$

(20b) の空間の b-関数もほとんど同様に計算できることを注意しておく.

6 b-関数の例

最後に例として定理 3 の空間の b-関数を紹介したいが, ページが足りないので, そのうちの 2 つの空間についてのみ記述したい. 序章において多変数 b-関数の応用として, ある局所ゼータ関数への応用について述べた. $\mathbb{R}$ 上でも成り立つ空間として, (b) のクラスの中では (10a)(10b)(10c)(15a)(15b) が条件を満たしている (cf. [1][2]). さらにこれらの空間は [8] により普遍推移性を持っていることについても注意したい. よって, そのうちの 1 つとして

$$(10a)(GL(1)^3 \times Sp(n) \times SL(2m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)(n > m)$$

を例にあげたい. $(\alpha, \beta, A, B) \in G = GL^2(1) \times Sp(n) \times GL(2m)$ と $(X, Y, Z) \in V = M(2n, 2m) \oplus M(2m, 1) \oplus M(2m, 1)$ について $(X, Y, Z) \mapsto (AX{}^tB, \alpha BY, \beta BZ)$ により作用が与えられる. Pf(X) を交代行列 X のパフィアンとする. [9] により基本相対不変式 f_1, f_2 と対応する指標 χ_1, χ_2 は

$$f_1(X, Y, Z) = \mathrm{Pf}({}^tXJX) \quad \leftrightarrow \quad \chi_1(\alpha, \beta; A, B) = \det B$$

$$f_2(X, Y, Z) = \mathrm{Pf}\left(\begin{array}{c|cc} {}^tXJX & Y & Z \\ \hline -{}^tY & 0 & 0 \\ -{}^tZ & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \leftrightarrow \quad \chi_2(\alpha, \beta; A, B) = \alpha\beta \det B$$

で与えられている. ただし $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline -I_m & 0 \end{array}\right)$, I_m は m 次の単位行列である. この空間では [6] において $b_{f_1}(s)$ が既に知られていいる. このとき

この空間の b-関数は

$$\begin{aligned} b_{\underline{m}}(\underline{s}) &= [s_1+1]_{m_1}[s_1+2n-2m+2]_{m_1}[s_2+1]_{m_2}[s_2+2m]_{m_2} \\ &\times \prod_{k=2}^{m}[s_1+s_2+2k-1]_{m_1+m_2} \times \prod_{l=0}^{m-2}[s_1+s_2+2n-2l]_{m_1+m_2} \end{aligned}$$

となっている.

次に面白い基本相対不変式を持つ空間として

$$(16)(GL(1)^3 \times Sp(2) \times SL(3), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_2 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$$

を例にあげたい. $Alt_4' = \{X \in Alt_4 | trXJ = 0\}$ と置く. $(\alpha, \beta, A, B) \in G = GL(1)^2 \times Sp(2) \times GL(3)$ と $(X, Y, Z) \in M(4,3) \oplus Alt_4' \oplus M(3,1)^*$ について $(X, Y, Z) \mapsto (AX^tB, \alpha AY^tA, \beta^tB^{-1}Z)$ と作用が与えられる. $X^{(i)} \in Alt_2$ を $X \in Alt_3$ から i 番目の列と行を抜いた交代行列とする. また $Z = {}^t(z_1, z_2, z_3)$ と置く. [9] により基本相対不変式 f_1, f_2 と対応する指標 χ_1, χ_2 は

$$f_1(X,Y,Z) = Pf(Y) \quad \leftrightarrow \quad \chi_1(\alpha,\beta;A,B) = \alpha^2$$

$$f_2(X,Y,Z) = \det\begin{pmatrix} Pf(({}^tXJX)^{(1)}) & Pf(({}^tXJYJX)^{(1)}) & z_1 \\ -Pf(({}^tXJX)^{(2)}) & -Pf(({}^tXJYJX)^{(2)}) & z_2 \\ Pf(({}^tXJX)^{(3)}) & Pf(({}^tXJYJX)^{(3)}) & z_3 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \quad \chi_2(\alpha,\beta;A,B) = \alpha\beta \det B.$$

と与えられている. この空間でも $b_{f_1}(s)$ が既に知られている. そして, この空間の b-関数は

$$b_{\underline{m}}(\underline{s}) = [s_1+1]_{m_1}[s_2+1]_{m_2}[s_2+2]_{m_2}^3[s_2+3]_{m_2}\left[s_1+s_2+\frac{5}{2}\right]_{m_1+m_2}.$$

となっている.

参考文献

[1] 天野勝利, 井草氏の結果の多変数化 (局所ゼータ関数がガンマ関数の積で書ける場合について), 数理解析研究所講究録 **1238**(2001), 1-11

[2] 藤上雅樹, Bohr-Mollerup の定理の一般化と局所関数等式の Γ-因子について, 数理解析研究所講究録 **1238**(2001), 20-29

[3] J.-I. Igusa, An Introduction to the theory of local zeta functions, Studies in Advanced Mathematics **14**, American Mathematical Society, 2000.

[4] M. Kashiwara, B-Functions and holomoic systems (Rationality of roots of b-functions), Invent. Math. **38**(1976), 33-53.

[5] 木村達雄,概均質ベクトル空間,岩波書店,1998年

[6] T. Kimura, The b-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, Nagoya Math. J. **85**(1982), 1-80

[7] T. Kimura, S. Kasai, M. Inuzuka and O. Yasukura, A classification of 2-simple prehomogeneous vector spaces of type I, J. Algebra **114**(1988), 369-400.

[8] T. Kimura, S. Kasai, Hosokawa, Universal transitivity of simple and 2-simple prehomogeneous vector spaces, Ann. Inst. Fourier, **38-2**(1988), 11-41.

[9] T. Kogiso, G. Miyabe, M. Kobayashi, T. Kimura, Explicit construction of relative invariants for regular 2-simple prehomogeneous vector spaces of type I, preprint

[10] F. Sato, b-Functions of prehomogeneous vector spaces attached to flag manifolds of the general linear group, Comment. Math. Univ. St. Pauli **48** (1999), 129-136

[11] 佐藤幹夫述, 新谷卓郎記, 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み **15** (1970), 85-157

[12] M. Sato, Theory of prehomogeneous vector spaces (Algebraic part) - The English translation of Sato's lecture from Shintani's Note(translated by M.Muro), Nagoya Math. J. **120**(1990), 1-34.

[13] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura, T. Oshima, Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, Invent. Math. **62**(1980), 117-179

[14] K. Sugiyama, Slice method for b-functions of prehomogeneous vector spaces, preprint.

[15] S. Wakatsuki, b-Functions of regular 2-simple prehomogeneous vector spaces associated to the symplectic group and the orthogonal group, preprint

[16] K. Ukai, b-Functions of prehomogeneous vector spaces of Dynkin-Kostant type for exceptional groups, Master's thesis, Nagoya University, 2001.

Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Osaka University,
Machikaneyama 1-16,
Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan.
E-mail: sm7052ws@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp